电子科技大学学报（社科版） 2010年（第12卷） 第5期 社科经纬
Journal of UESTC (Social Sciences Edition) Oct.2010,Vol.12,No.5

何谓集合

□姚从军 [湖南科技学院 永州 425100]

[摘 要] 人们通常用康托集合论来判断ZFC系统的合法性，它对集合有两种主要解释：大小限制概念和叠置概念。大小限制概念把一个收集的统一性或客观现实性看作与该收集自身的大小相关，它不能对基公理和幂集公理的存在性提供合法的解释。集合的叠置观点对于集合的形成存在一个时态的限制，它可证明子集公理和幂集公理的合法性，但是它不能为代换公理提供一个解释。对叠置构造强加一个大小限制条件，可以成功地用来解释代换公理，它不能用来说明幂集公理的合法性。结构观点认为一个集合是打开一个可能结构的模式，集合的同一性应该由它们的打开模式的同一性确定，在这种概念下，没有理由把这种可能的结构限制在良基上。

[关键词] 限制大小； 叠置； 结构打开； 代换公理； 基公理； 幂集公理
[中图分类号] B026 [文献标识码]A [文章编号]1008-8105(2010)05-0058-04

引言

人们通常用康托集合论来判断最广泛接受的集合论系统（ZFC）的合法性。这种集合论对集合有两种主要解释：大小限制概念和叠置（累加）概念。这两种解释都是基于Barwise和Moss1991年提出的盒子（box）隐喻基础上：“一个集合像一个盒子，形成一个集合就像把东西放在一个盒子里。”[1]这是对集合的一种十分直观的描述，被称为集合的颠倒（bottom-up）观点：把东西收集起来放在盒子里。

ZFC系统是由Zermelo提出并且由Fraenkel和von Neumann通过增加代换公理而加强的公理系统。所有经典的数学理论和概念可在ZFC里定义和推出，这个系统是所有数学研究的标准基础。任意合理的“择换集合论”应该可以通过证明一个传递类V的存在来保持ZFC 的所有优点，这里（V，∊）是ZFC 的模型。这个模型是标准的，也就是在形成集合的运算下封闭。

系统ZFC-是通过去掉ZFC系统中的基公理得到的。正如许多学者所述，基公理是对集合结构的一种人为限制，这种限制的主要理由是纯技术性的：这种限制使得集合的概念更加明确，允许我们按照属于关系进行归纳来证明一些结论。但是，基公理对于我们在集合论里发展任意的具体的数学分支并非都是必需的。我们可以简单地在ZFC-系统里定义所有的良基集合类WF，并且证明这个类是系统ZFC的一个传递的标准模型。

除了外延公理和选择公理之外，ZFC-的所有公理都是通常的天真的概括原则（断言每个可定义的类是一个集合）的特例。实际上，这些公理是Zermelo使用一种方式削弱天真的概括原则得到的：不出现悖论，但是经典的数学和康托的超穷基数理论仍旧可以发展，并且康托的良序原则可被证明是一个定理。

但是，除了这些有用性之外，什么理由使我们恰好保留天真概括原则的这些实例而不是其他实例呢？人们很自然地去寻找一个直观的集合概念，它比天真的集合概念要有更多的限制，但是对于它们来说，ZFC的拟概括公理仍然是真的。

一、大小限制的观念

Fraenkel、Bernays、von Neumann、Levy的大小限制概念把一个收集(collection)的统一性或客观现实性看作与该收集自身的大小相关：一个类如果不太大可被视为一个对象。那个根本的空间比喻对盒子作了一个基数限制：不能把太多的东西放在同一个盒子里面。Fraenkel使用了圆形封闭墙的比喻：

[收稿日期] 2009－12－01
[基金项目] 2008年国家社科基金“超集、互模拟以及在模态逻辑、计算机科学中的作用研究”资助项目（08BZX049）。
[作者简介] 姚从军（1971－ ）男，哲学博士，湖南科技学院思政部教师.

电子科技大学学报（社科版） 2010年（第12卷） 第5期 社科经纬
Journal of UESTC (Social Sciences Edition) Oct.2010,Vol.12,No.5

“集合把它们围成一座封闭的墙，这座墙把它们与外部的世界隔离开来，”然而为了形成真类，“必须从每座墙的外面取得元素，不管如何形成围墙。”[2]

他也说真类是“矛盾的因为它们的无限扩展”。顺便提一下，这是对前康托概念（认为一个收集的现实性与其大小有关）的一个复归：对于亚里士多德和中世纪哲学家来说，所有无穷的类是真类，因为仅仅有穷的收集是实在的，而基数大于每个自然数的所有收集仅有一个潜在的存在性。现在这个栅栏被提升了，因此所有小于某个大类（比如域U）的类被视为集合，所有其他的类（真类）只有一个潜在的现实性。

把集合和类的区别等同于小和大的区别的观点相当普遍，笔者不坚持这种观点，因为：类是一个松散的潜在的收集，不一定形成一个统一体；集合是作为统一体的现实的类。

虽然小的收集是集合，但是没有充足的理由认为所有的集合是小的；这样的一个假设似乎是对于Russel和Burali-Forti悖论的一种特别的解决方式，也就是仅仅为了除掉不一致的罗素类R={x: x∉x}和不一致的所有序数类On，扔掉完全良性的大类。毕竟，人们很容易转向康托的针对亚里士多德以大小为基础的把无穷等于纯潜在性的论证。也许，R和On过于大不是它们不具有完全性的原因，而是它们的不可结束的特点。

加之，大小限制的概念不能实现它的诺言：它不能解释ZFC的所有公理，并且它的精神实际上与ZFC的某些公理是相矛盾的。很容易证明空集公理、对集公理、代换公理、和子集公理存在的合法性；对于代换公理来说，大小限制概念实际上是此刻可得到的有关它存在合理性的仅有的解释：代换公理简单断言任一（在基数上）不大于一个已知集合的收集是一个集合。可对这个概念进行特别的改造使之容纳无穷公理和并集公理。但是大小限制概念没有对基公理和幂集公理的存在性提供合法的解释。为什么一个小集合的幂集还是小的呢？即使这是真的，这也是不明显的。相反，Cohen和Easton的结论蕴涵了一个无穷集a的大小和它的幂集Pa的大小之间的联系是不可证的；一个无穷集的幂集打消了我们“想通过大小刻画它的所有念头”[3]；加之无穷集的非绝对性，它与整个域的大小紧密相关。因此，对于大小限制概念来说，幂集公理至少是反直观的。人们也许会基于某些证明被迫地接受它，但不是作为一条公理。用M. Hallet的话来说，“幂集公理不过是一个秘密。”[4]

总之，大小限制观念分离出一种重要的集合的收集：小收集。大小区别在集合论中处于核心位置，小集合的行为方式不同于大集合。

二、叠置观念

Zermelo、Schoenfield、Scott、Wang、Godel的关于集合的叠置观点基于对盒子比喻的时态理解基础上：盒子是分层形成的，并且被放在新盒子里面。对于集合的形成存在一个时态的限制：不能把一个还没有创造的对象放在一个盒子里面。因此，一个收集的客观实在性又一次根据实在和潜在的区别得到理解：每一时刻，只有已被创造的集合是实际存在的，并且因此可作为新集合的构造之砖。还没被创造的集合仅仅具有潜在的存在性。像所有集合的集合这样的全体在任何时刻都不可形成，因为这将牵涉到也许在将来才会形成的集合的立即实在化。这些全体包含了在任一较迟的时期出现的集合作为元素，因此它们的收集永远形成不了。这样的全体不可完成并因此被判定永远处于一个潜在的状态。

更精确地说，假定我们有一个逻辑的时间感觉，它是由具有先后顺序的阶段构成。这些阶段与序数具有同一性，这意味着逻辑时间是超穷的和良序的。理想化的数学家按照时间构造集合的域。在每一个阶段他用较早阶段形成的集合构造所有的收集。他把这些新收集放到储存集合的仓库中，然后再进行下一阶段的构造活动。这个过程有一个记忆：它把已经形成的所有集合累积在一起。

累积的观点是有力和直观的，并且变成现代集合论中占支配地位的概念。藉此很容易证明对集公理、并集公理、无穷公理和基公理的合法性。它也能证明子集公理和幂集公理的合法性。但是，很显然它不能为代换公理提供一个解释：不存在明显的原因使得先前阶段形成的某个集合的函数的像不在任一稍后阶段出现。

标准的答案是：一旦我们有了一个函数F，我们能够想像在任一旧阶段之外的一个新阶段，并且形成该函数在这个新阶段的值域。有许多理由认为这个反应是有缺陷的。一个可定义的函数仅仅是一个公式，新阶段的每次加入和域的每次扩张也许会改变公式的意义。在增加了一个新阶段之后，实际上我们能够形成与F的旧值域相对应的集合，但是这将不是F在新全域下的值域。

有时这个答案又要采用一个大小比喻的形式：与在过程中所形成的每个集合相比较而言，人们假定阶段（逻辑时间）的收集是大的。存在比任意集

合中的元素更多的阶段。换句话说，在任一阶段创造的集合比所有阶段的收集要小。这似乎是一个可信的假设，并且把时态叠置比喻与大小空间比喻合并起来实际上能够证明代换公理的合法性。但是，我们怎么来理解这两个比喻的混合物的一致性呢？预先我们怎么保证可以得到的时间长度将会长于在这个时间内形成的任一集合序列呢？

一些作者根据时间没有终点的观点来理解这一问题：他们把时态阶段看作是根据时间伴随着集合而构造的。在某一个阶段创造了一个集合a之后，我们不是仅仅增加了下一个新阶段，而是可能增加足够多的阶段，以至于可以枚举在阶段a创造的集合。如果这个图是一致的，实际上证明了代换公理的合法性。但是，这个观点明显是不一致的，尽管它具有明显的直觉特征：按照时间构造时间是什么意思？更糟糕的是，我们注意到按照这种观点，通过增加与某个阶段相关的集合，我们一次不仅仅创造一个阶段，而是在构造与某些阶段相联系的集合之前，可以提前创造无穷多的未来阶段。这样的一个假设致使构造集合的基本的叠置概念（用一种拟构造方式一个阶段接一个阶段连续地构造）无意义。

尽管一直在说时间是没有终点的，但是笔者认为一个合理的和一致的关于叠置图的理解把可以得到的时态阶段的收集看作是已知的。我们按照时间创造集合，其中一些集合也许从同构意义上反映了时态阶段的结构；但是我们不能跳出逻辑时间创造更多的时间。

但是，如果把阶段的收集On看作已知的，那么如何保证被连续创造的集合比On本身小呢？最自然的方式是对叠置构造强加一个大小限制条件：在每一个阶段仅仅由先前所形成的集合生成小收集，这里小被理解成比所有阶段的收集On小。原则上说，用这种方式，仅仅能够形成在将来某个阶段可以枚举的集合。这个观点可以成功地用来解释代换公理。但是不幸的是，它不能用来说明幂集公理的合法性；由于同样的原因，单一的大小限制观念也不能做到这一点：没有什么可以保证一个小集合的幂集本身是小的。

对于幂集公理来说无论如何也存在一些问题：用完全非直谓的可以接受的方式来说，这个公理与叠置概念的拟构造特点相冲突。我们最终构造出一个集合的所有子集，但是这不蕴涵能够把所有这些子集收集成一个统一体。一个更加现实的对叠置图的理解坚持在每一个阶段我们可得到由先前形成的对象构成的所有的集合。但是，这是否能够证明幂集公理的合法性是有争议的，存在合理的论证表明我们从来不能构造成一个无穷集合的满幂集：随着域的扩展，幂集也会增加。

三、结构观点

Barwise和Moss1991年提出忘记结构比喻作为对Aczel反良基公理的一种直觉理解和对通常的盒子比喻的一种择换，这种理论认为集合是一个复杂东西的结构。

通过忘记组成部分的本质，剩下的唯一东西是整体和部分之间的集合体或非集合体关系，也就是属于关系结构。这个结构是点结构，因为它有一个根：通过连续地分解方式打开结构的内在过程有一个起点，也就是当下考虑的对象。因此我们把集合看作点二元结构。

我们可以把这个概念看作是在一个叠置图的上端旋转它：不是从底层开始，使用已知对象的收集逐层构造集合，现在从一开始我们就被给予了一个统一体（对象），我们把它分解成组成部分，依次对组成部分进行分解，这样一层层分解……这是一种从上到下的分析集合的观点。根据盒子比喻，我们不是把东西放在盒子里，它们处于盒子里面。Moschovakis1994年使用了一个恩赐比喻引进Aczel的非良基集合：我们接受每个盒子作为来自宇宙的一个恩赐；我们仅仅打开盒子看看盒子里面装的是什么东西，并且继续打开在这个过程中遇到的新盒子。通过忘掉除这种打开模式之外的每件东西我们得到一个集合。

注意到在这种概念下，没有理由把这种可能的结构限制在良基上，包含无限可分的对象一定是可以想像的。因此基公理必须走开，但是这立即提出了确定集合同一性问题：一个集合的本质特征是什么？正如许多人指出的（如Forster）那样，关于集合最基本的和争议最少的原则是：我们知道的关于一个集合的存在是它的元素。假设基公理，这个原则可归约到外延公理：具有相同元素的集合具有同一性。基公理允许我们使用这个原则根据∈-递归定义集合上的恒等关系。在没有基公理的情况下，我们需要某个更强的概念确定集合的相等性。

在结构观点的背景下，存在外延性原则的一个自然的扩展：一个集合不过是我们假设的打开一个可能结构的模式，因此集合的同一性应该由它们的打开模式的同一性确定。

我们获得一个基于分析行为的同一性的结构等

电子科技大学学报（社科版） 2010年（第12卷） 第5期 社科经纬
Journal of UESTC (Social Sciences Edition) Oct.2010,Vol.12,No.5

价性概念：两个结构是等价的当且仅当它们的打开模式是相同的。这等价性叫做观察等价性，因为上面的分析可被视为对当前考虑的对象执行的一系列观察。存在各种严格地定义这一概念的方式，所有定义对小结构是等价的，并且都具有这样的性质：一个集合的打开通过打开该集合的元素而实现；用纯结构术语来说，一个具有根点g的点结构的打开通过打开以g的后继为根点的点结构来实现。

我们可以把上面的集合同一性标准陈述为：具有观察等价的结构的集合是同一集合。我们称这个原则是强外延性原则或超强外延性原则。根据它的超强公式，这个原则可被看作刻画了已知的关于集合断言（集合仅仅由它们的元素确定）的满结构内容，这是因为一个集合的打开模式由它的元素的打开模式唯一确定。

这不是把集合的同一性简单地归约到结构的同构性，因为集合概念不具有“打开”特点：集合的组成部分本身被看作集合。换句话说，集合是由集合组成的结构。

例如，取一个对象，它恰好是一个由组成部分构成的非空的集合体，每个组成部分本身又是一个非空的集合体，如此类推……显然每个组成部分与初始对象有相同的分析行为：如果我们忘记除这个分析模式之外的每件东西，那么所有的组成部分与初始对象是同一的。最后的集合仅有一个元素，即它自身，这就是Aczel的集合$\Omega=\{\Omega\}$，这是使人感到灰心的恩赐：一个盒子里面装有一个盒子，里面的盒子也装有一个盒子，以此类推，无穷无尽。

现在我们陈述结构观念的主要原则：

极大性原则（结构完全性原则）：打开结构的每个可能的模式是打开某个集合的模式。

唯一性原则（超强外延性原则）：两个具有观察等价性（具有相同的打开模式）的集合是同一集合。

依赖于观察等价性的精确定义，这些原则将通过Aczel的反良基公理和Baltag的超反良基公理得到体现。简单地说，第二个原则（唯一性原则）就是上面提到的（超）强外延原则；第一个原则（极大性原则）可被看作这些公理的存在性方面。它是一个极大性假设，断定每个可能的结构模式是可以被认识的。通过理解一个可能的模式是什么，我们获得了AFA、SAFA和FAFA的存在性。

在任一形式化中，很容易看作上面两个原则的合取揭示了下面的断言：

每个点二元结构与一个唯一的集合是观察等价的。

这就断定了集合的本质是纯结构的基本观点。把点二元关系结构描述为集合的结构不需要对结构强加任何限制，只要我们对相对于观察等价性而言的唯一描述满意。加之，存在好的理由对这样的一个描述满意：一般来说，根据唯一性或超强外延性我们不能希望有一个更好的描述，因为观察等价集合一定是同一集合。

当然，对于具体的结构，我们有完美的集合描述：它们也许与某个集合的结构是同构的。但是，如果寻找相对于同构的描述，可以看到（超）强外延原则仍就对可能得到的那类二元结构强加了某些限制。也就是说，这些结构将一定是（超）强外延的。

上面的讨论明显是非形式的：我们还没有明确说明我们的背景假设是什么；我们还没有试图定义结构和观察等价性概念。首先是Aczel的非良基集合论ZFA，它通过削弱这个理论的背景假设使我们能够加强我们的结构概念和观察等价性概念使之与天真集合论中非形式对应物相匹配。最终的理论被Baltag简单地称为集合的结构理论（STS）。

参考文献

[1] BARWISE J, MOSS L. Hypersets[J]. The Mathematical Intelligencer, 1991, 13(4): 31-41.

[2] FRAENKEL A. Abstract set theory[M]. Amsterdam : North-Holland Publishing Co. 1953:45.

[3] COHEM A. Numerical analysis[M]. New York : Wiley, 1973:122-135

[4] HALLET M. Cantorian set theory and limitation of size[M]. Oxford: Clarendon Press ,1984:125

[5] ACZEL P. Non-well-founded sets[M]. Stanford: CSLI Publications, 1988.

[6] BARWISE J, MOSS L. Vicious circles: on the mathematics of non – well – founded phenomena [M].Stanford: CSLI Publications , 1996.

[7] BALTAG A. Modal Characterizations for sets and Kripke structures[M]. Unpublished manuscript, 1995:63-99.

[8] MOSCHOVAKIS Y N. Set theory notes Undergraduate texts in mathmatics[M]. Amesterdam: North Holland, 1994.

[9] ARISTOTLE. Physics Books III [M]. Oxford: Oxford University Press, 1983

[10]ZERMELO E. Uber Grenzaahlen und Mengenbereiche[J]. Fundamenta Mathematische, 1930, (16): 2

（下转第102页）