

三支决策模型及其研究现状分析



□梁德翠 曹 雯

[电子科技大学 成都 610054]

[摘 要] 三支决策是由Yao等人基于决策粗糙集理论模型, 进一步结合决策情景而提出的一种决策理论。它成功地粗糙集的正域、负域和边界域合理地赋予了语义解释, 分别对应实际决策中的接受、拒绝和延迟决策。三支决策理论自提出以来, 随即得到诸多学者关注并对其进行完善和拓展, 其已在多领域得到广泛应用。详细介绍三支决策的背景及基本理论模型, 总结国内外关于三支决策的研究现状及进展, 最后对三支决策未来研究方向进行了展望。

[关键词] 三支决策; 决策粗糙集; 粗糙集; 条件概率; 损失函数; 不确定性

[中图分类号] TP39

[文献标识码] A

[DOI] 10.14071/j.1008-8105(2018)-1160

Three-Way Decisions: Model and the State of the Art

LIANG De-cui CAO Wen

(University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054 China)

Abstract Based on decision-theoretic rough sets and practical situation, the concept of three-way decisions is a kind of decision theory proposed by Yao et al. With the aid of this theory, the positive, negative and boundary regions of rough sets are given a new semantic explanation, which correspond to the notions of acceptance, rejection and deferment in decision making, respectively. Since the raise of three-way decisions, it has attracted many scholars' attentions and it is improved and expanded to many fields. In this paper, we firstly introduce the background and basic theoretical models of the three-way decisions. Then, we can review the current research status and progress of this topic. Finally, we look forward to the future research trends.

Key words three-way decisions; decision-theoretic rough sets; rough set; conditional probability; loss function; uncertainty

引言

粗糙集理论 (Rough set theory) 作为一种数据分析理论, 于1982年由波兰科学家Z.Pawlak提出^[1]。然而, 经典粗糙集理论由于没有考虑不确定性的容错性, 其应用得到一定的限制。为完善该经典理论, 1990年, 加拿大Regina大学的Yao Y Y (姚一豫) 教授等人结合贝叶斯决策过程提出了决策粗糙集理论 (Decision-theoretic rough sets, DTRSs)^[2]。

2009~2010年, Yao在决策粗糙集理论的基础上提出了三支决策 (Three-way Decisions)^[3-4], 至此, 决策粗糙集的理论模型及其语义应用体系已正式建立。

三支决策, 意为在人们实际决策中, 由于对事物信息了解程度不同, 往往做出三种类型的决策: 接受决策、拒绝决策和延迟决策 (或非承诺决策)。对于有充分把握、信息了解全面的事物, 能够直接给出接受或者拒绝的判断, 而那些把握不充分、信息了解不够全面的事物, 往往需要做进一步

[收稿日期] 2018-02-01

[基金项目] 国家自然科学基金 (71401026); 中央高校基本科研业务费专项资金 (ZYGX2014J100)。

[作者简介] 梁德翠 (1986-) 男, 电子科技大学经济与管理学院研究员; 曹雯 (1996-) 女, 电子科技大学经济与管理学院硕士研究生。

的调查, 表现为延迟决策。在实际生活中, 三支决策有着非常广泛的应用。例如, 警察在判断案件嫌疑人是否为罪犯时, 对于明显无犯罪动机和证据的人员, 警察予以释放; 对于有确凿作案动机和相关证据的人员, 警察判定其为罪犯并关押; 对于动机不明显、证据未知的人员, 警察会进一步审判和侦测寻找证据再作出结论。三支决策是对传统二支决策的优化, 相对于只能选择接受或拒绝的二支决策, 三支决策能够在信息不完备的情景下, 给出延迟决策的决定。三支决策概念提出后, 诸多学者对其进完善、补充和扩展。比如: 贾修一等出版了书籍《三支决策理论与应用》, 详细地分析基于概率粗糙集的三支决策^[5]。随即, 由刘盾主编的《三支决策与粒计算》介绍三支决策与粒计算的基本原理, 并展示了国内外三支决策与粒计算最新研究成果^[6]。于洪的《三支决策: 复杂问题求解方法与实践》更新了三支决策的实践应用成果^[7]。此外, 梁德翠的《模糊环境下基于决策粗糙集的决策方法研究》具体研究四种模糊环境下基于决策粗糙集的理论模型和决策方法^[8]。

本文首先阐述了三支决策的背景和意义, 然后对三支决策已有研究成果进行现状分析, 并详细解释了三支决策基本模型, 再总结归纳国内外学者的研究, 最后讨论与展望三支决策未来发展方向, 为研究者们进一步深入这一主题的工作总结出可能的研究点。

一、三支决策研究成果的现状分析

自三支决策概念提出以后, 吸引了众多学者的关注和发展。这里, 以三支决策(three-way decisions)、决策粗糙集理论(decision-theoretic rough sets)、概率粗糙集(probabilistic rough sets)为关键词

在Web of Science核心数据库进行检索, 检索日期为2018年1月17日, 共获得1094个记录, 具体分析如下。

(一) 三支决策主题发表期刊论文数量情况

从图1可以看出: 有关三支决策和决策粗糙集的期刊论文数量从2001年左右, 开始进入持续增长阶段, 到2013年, 优质期刊论文数量突破一百余份。这表明, 三支决策正成为当前的研究热点。

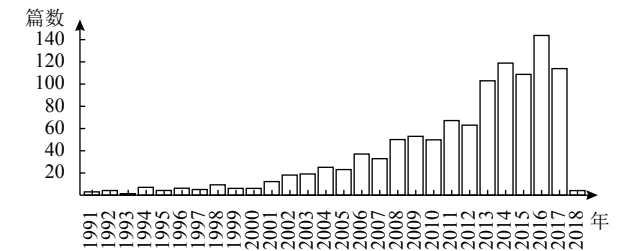


图1 三支决策期刊论文数量

(二) 主要发表期刊

从表1可以看出: 《INFORMATION SCIENCES》《INTERNATIONAL JOURNAL OF APPROXIMATE REASONING》和《KNOWLEDGE BASED SYSTEMS》是发表数量前三的期刊。而发文最多的《LECTURE NOTES IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE》, 要收录的是粗糙集年会上的论文集。

(三) 主要研究机构

表2展示的是前25名研究机构名单和论文数量。由此可以知: 加拿大的UNIV REGINA作为该理论的发源地, 论文数量遥遥领先世界其他研究团队。同时, 国内机构超过半数, 主要有西南交通大学、同济大学、重庆邮电大学、南京大学、南京理工大学、电子科技大学、武汉大学、西安交通大学、山西大学、四川大学、浙江海洋大学、西安电子科技大学、上海大学、四川师范大学等, 这表明我国的三支决策研究达到世界先进水平。

表1 三支决策主要发表期刊

来源出版物名称	记录数	占1094的%
《LECTURE NOTES IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE》	122	11.152%
《INFORMATION SCIENCES》	56	5.119%
《INTERNATIONAL JOURNAL OF APPROXIMATE REASONING》	47	4.296%
《KNOWLEDGE BASED SYSTEMS》	44	4.022%
《LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE》	34	3.108%
《FUNDAMENTA INFORMATICA》	19	1.737%
《JOURNAL OF INTELLIGENT FUZZY SYSTEMS》	15	1.371%
《ROUGH SETS AND KNOWLEDGE TECHNOLOGY RSKT 2014》	15	1.371%
《ROUGH SETS AND CURRENT TRENDS IN COMPUTING PROCEEDINGS》	12	1.097%
《ROUGH SETS AND KNOWLEDGE TECHNOLOGY》	12	1.097%

表 2 三支决策的主要研究机构

机构	记录数	占1094的%
UNIV REGINA	105	9.598%
SOUTHWEST JIAOTONG UNIV	49	4.479%
TONGJI UNIV	33	3.016%
POLISH ACAD SCI	29	2.651%
UNIV KANSAS	28	2.559%
CHONGQING UNIV POSTS TELECOMMUN	26	2.377%
NANJING UNIV	24	2.194%
UNIV ALBERTA	22	2.011%
NANJING UNIV SCI TECHNOL	19	1.737%
UNIV ELECT SCI TECHNOL CHINA	19	1.737%
UNIV BURGOS	13	1.188%
UNIV INFORMAT TECHNOL MANAGEMENT	13	1.188%
WUHAN UNIV	13	1.188%
XI AN JIAO TONG UNIV	13	1.188%
SHANXI UNIV	11	1.005%
SICHUAN UNIV	11	1.005%
ZHEJIANG OCEAN UNIV	11	1.005%
CHINESE ACAD SCI	10	0.914%
XIDIAN UNIV	10	0.914%
INDIAN STAT INST	9	0.823%
QUEENSLAND UNIV TECHNOL	9	0.823%
SHIMANE UNIV	9	0.823%
MINIST EDUC	8	0.731%
SHANGHAI UNIV	8	0.731%
SICHUAN NORMAL UNIV	8	0.731%

（四）主要研究者

从表3可知：按照论文数量排名的作者中，Yao Y Y以49的记录数位于榜首，国内的刘盾以32的记录数紧随其后。此外，YAO J T、李天瑞、苗夺谦、梁德翠等学者也居于前十，从论文数量方面看，国内学者在三支决策的研究成果颇多。

表 3 三支决策论文数量作者

作者	记录数	占1094的%
YAO Y Y	49	4.479%
LIU D	32	2.925%
YAO J T	30	2.742%
LI TR	29	2.651%
GRZYMALA-BUSSE JW	26	2.377%
MIAO DQ	21	1.920%
CLARK PG	20	1.828%
LIANG DC	20	1.828%
ZIARKO W	20	1.828%
TSUMOTO S	18	1.645%

（五）高被引用论文情况

经过数据库的筛选得出27篇被评为高被引用论文（ESI高水平论文），具体分析如下：

从表4可知：ESI高水平论文的作者中，YAO Y Y依然排第一，梁德翠、刘盾分别位于第二和第三，此外还有国内的李天瑞、钱宇华、胡宝清、梁吉业和罗川等。由此可见，国内很多学者对此领域的提供了很多高质量的研究成果。

表 4 三支决策主要ESI高水平论文作者

作者	记录数	占27的%
YAO Y Y	5	18.519%
LIANG DC	4	14.815%
LIU D	4	14.815%
LI TR	3	11.111%
PEDRYCZ W	3	11.111%
QIAN YH	3	11.111%
FUJITA H	2	7.407%
HU BQ	2	7.407%
LIANG JY	2	7.407%
LUO C	2	7.407%

从表5可知：ESI高水平论文方面主要是发表在《INFORMATION SCIENCES》《KNOWLEDGE BASED SYSTEMS》和《INTERNATIONAL JOURNAL OF APPROXIMATE REASONING》这三个期刊上。

表 5 三支决策主要ESI高水平论文期刊

来源出版物名称	记录数	占27的%
《INFORMATION SCIENCES》	9	33.333%
《KNOWLEDGE BASED SYSTEMS》	8	29.630%
《INTERNATIONAL JOURNAL OF APPROXIMATE REASONING》	6	22.222%
《APPLIED SOFT COMPUTING》	1	3.704%
《COGNITIVE COMPUTATION》	1	3.704%

作为最早提出三支决策概念的文章之一，Yao的《Three-way decisions with probabilistic rough sets》^[4]处于ESI高水平论文首位，共计被引290次，这篇文献详细介绍了基于粗糙集和决策粗糙集的三支决策理论，丰富了基于贝叶斯决策过程的粗糙集理论，三支决策相关体系首次建立。此外，Yao等人的《Attribute reduction in decision-theoretic rough set models》^[9]、Yao的《Probabilistic rough set approximations》和《The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models》^[10-11]均名列前茅（见表6），这几篇文献进一步分析了三支决策相关属性，证明了三支决策的优越性，并给出了决策粗糙集最新成果。作为三支决策概念的提出者，Regina大学的Yao教授在该领域影响显著。

在国内学者中，贾修一等人的《Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models》^[12]提出一种属性约简方法；钱宇华等人的《Multigranulation decision-theoretic rough sets》^[13]提出一种多粒度决策粗糙集理论；梁德翠和刘盾合作的《Incorporating logistic regression to decision-theoretic rough sets for classifications》（被引56次）、《Deriving three-way decisions from

intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets》(被引49次)、《Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets under linguistic assessment with the aid of group decision making》(被引42次)、《A novel three-way decision model based on incomplete information system》(被引35次)^[14-17]均被评为ESI高水平论文,其主要研究模糊环境下、语言评价条件下、不完备信息系统下的三支决策理论与方法,具有较高学术价值和扩展性。

表 6 三支决策ESI高水平论文(前六)

ESI高水平论文	被引用数
《Three-way decisions with probabilistic rough sets》	290
《Attribute reduction in decision-theoretic rough set models》	256
《Probabilistic rough set approximations》	256
《The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models》	210
《Multigranulation decision-theoretic rough sets》	108
《Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models》	96

二、三支决策基础模型

三支决策作为决策粗糙集理论的语意解释,本部分重点介绍其基础模型的由来和关键要素。在粗糙集理论中,假定论域为 U ,某一不精确的概念 C 上下近似集将 U 划分成了正域 $POS(C)$ 、边界域 $BND(C)$ 和负域 $NEG(C)$ ^[1,3],如图2所示。

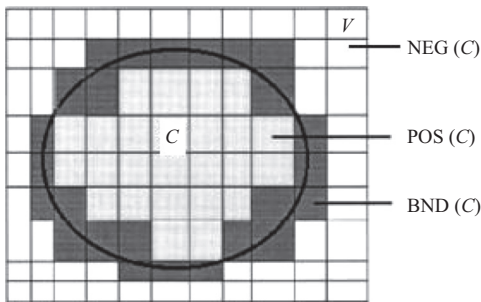


图 2 概念 C 划分的三区域

需要注意的是,图2中每个小方格代表一个精确的概念,椭圆代表不精确概念 C 。根据Pawlak^[1]经典粗糙集模型,概念 C 在论域 U 的上下近似集为:

$$\overline{\text{apr}}(C) = \{x \in U | [x] \cap C \neq \emptyset\}; \tag{1}$$

$$\underline{\text{apr}}(C) = \{x \in U | [x] \subseteq C\}; \tag{2}$$

式(1)和(2)中, $[x]$ 代表的是对象 x 在信息系统中的等价类。此时,上下近似集把论域划成三个区域,具体为:

$$POS(C) = \{x \in U | [x] \subseteq C\}; \tag{3}$$

$$BND(C) = \{x \in U | [x] \not\subseteq C \wedge [x] \cap C \neq \emptyset\}; \tag{4}$$

$$NEG(C) = \{x \in U | [x] \cap C = \emptyset\}; \tag{5}$$

在实际情景中,正域 $POS(C)$ 、边界域 $BND(C)$ 和负域 $NEG(C)$ 分别代表接受决策、延迟决策和拒绝决策,统称为三支决策。

根据贝叶斯决策过程,决策粗糙集模型由两类状态和三种行动组成。状态集,记为 $\Omega = \{C, \neg C\}$,包含两个互补关系的状态 C 和 $\neg C$,分别表示对象属于 C 和不属于 C 。行动集,记为 $A = \{a_P, a_B, a_N\}$,其中 a_P, a_B, a_N 代表在对一个对象 x 分类时所采取的三种行动,依次表示: $x \in POS(C)$,表现为接受决策; $x \in BND(C)$,对象 x 需要进一步调查,表现为延迟决策; $x \in NEG(C)$ 表现为拒绝决策。在不同状态下采取不同行动所对应的损失函数矩阵,如表7所示。

表 7 不同状态下采取不同行动所对应的损失函数矩阵

	$C(P)$	$\neg C(N)$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

在表7中, $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}$ 和 λ_{NP} 和表示当对象属于 C 时,分别采取行动 a_P, a_B 和 a_N 所对应的损失值。同理, $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}$ 和 λ_{NN} 表示当对象属于 $\neg C$ 时,分别采取行动 a_P, a_B 和 a_N 所对应的损失值。 $\Pr(C|[x])$ 表示对象 x 属于 C 的条件概率,对象 x 这里采用它在信息系统中的等价类 $[x]$ 来描述。

对于一个对象 x ,采取所有行动所得到的期望损失 $R(a_i|[x]) (i = P, B, N)$,可以表达为:

$$\begin{aligned} R(a_P|[x]) &= \lambda_{PP} \Pr(C|[x]) + \lambda_{PN} \Pr(\neg C|[x]), \\ R(a_B|[x]) &= \lambda_{BP} \Pr(C|[x]) + \lambda_{BN} \Pr(\neg C|[x]), \\ R(a_N|[x]) &= \lambda_{NP} \Pr(C|[x]) + \lambda_{NN} \Pr(\neg C|[x]). \end{aligned} \tag{6}$$

根据贝叶斯最小风险原则,可以得到以下形式的决策规则:

(P) 如果 $R(a_P|[x]) \leq R(a_B|[x])$ 和 $R(a_P|[x]) \leq R(a_N|[x])$ 成立,则有: $x \in POS(C)$;

(B) 如果 $R(a_B|[x]) \leq R(a_P|[x])$ 和 $R(a_B|[x]) \leq R(a_N|[x])$ 成立,则有: $x \in BND(C)$;

(N) 如果 $R(a_N|[x]) \leq R(a_P|[x])$ 和 $R(a_N|[x]) \leq R(a_B|[x])$ 成立,则有: $x \in NEG(C)$ 。

根据Yao的研究,决策规则(P)-(N)称之为三支决策,即包括三个区域: $POS(C), BND(C)$

和NEG (C) [4]。考虑损失值间关系存在如下:

$$\lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} < \lambda_{NP}, \quad (7)$$

$$\lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} < \lambda_{PN}. \quad (8)$$

式 (7) 表明, 如果 x 属于 C , 那么将 x 判入 POS (C) 中所带来的损失要小于将其判入 BND (C) 中, 同时两者的损失又都小于将其判入 NEG (C) 中所带来的损失。同理, 如果 x 不属于 C , 将其判入 NEG (C) 中所带来的损失要小于将其判入 BND (C) 中的, 同时两者的损失都小于将其判入 POS (C) 中所带来的损失。以式 (7) 和式 (8) 为前提条件, 利用 $\Pr(C|x) + \Pr(\neg C|x) = 1$, 对规则 (P) ~ 规则 (N) 进行简化, 则得到决策规则 (P) ~ 规则 (N) 简化表达式:

(P) 如果 $\Pr(C|x) \geq \alpha$ 和 $\Pr(C|x) \geq \gamma$ 成立, 则有: $x \in \text{POS}(C)$;

(B) 如果 $\Pr(C|x) \leq \alpha$ 和 $\Pr(C|x) \geq \beta$ 成立, 则有: $x \in \text{BND}(C)$;

(N) 如果 $\Pr(C|x) \leq \beta$ 和 $\Pr(C|x) \leq \gamma$ 成立, 则有: $x \in \text{NEG}(C)$ 。

其中, 阈值 (α, β, γ) 为:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}, \\ \beta &= \frac{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}, \\ \gamma &= \frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN})}{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})}. \end{aligned} \quad (9)$$

近年来, 针对三支决策经典理论模型的研究, 已吸引了国内外学者的广泛关注, 如在 2009~2017 年国际粗糙集学会举办的连续九届国际粗糙集与知识技术学术会议 (RSKT), 以及 2011~2017 年中国粗糙集学会举办的连续七届中国粗糙集与软计算学术会议 (CRSSC) 上都举办了三支决策与决策粗糙集相关主题的研讨会。再比如梁德翠和刘盾等 [8,14-15] 结合不确定性评估和损失函数, 考虑决策粗糙集中各损失值为模糊数等不确定性形式, 得到一系列不确定性决策粗糙集模型。从上述基于决策粗糙集的三支决策模型来看, 条件概率和损失函数是其应用的两个关键要素。

三、三支决策的主要研究成果

本文已收集了大量国内外三支决策主题的研究文献, 先主要围绕其应用中的两大要素出发, 从条件概率、损失函数及其他方面研究的角度总结三支决策已有研究成果。

(一) 条件概率方面研究

决策粗糙集使用条件概率作为评价函数, 能够将评价和各种度量函数相联系。有不少的学者在条件概率方面进行研究, 如表 8 所示。

表 8 条件概率方面研究

作者	内容
Yao and Zhou ^[18]	结合朴素贝叶斯分类思想和决策粗糙集, 提出朴素贝叶斯决策粗糙集模型 (NBRS), 能够基于贝叶斯理论和朴素概率独立假设进行估算条件概率。
Liu et al. ^[14]	结合逻辑回归和决策粗糙集理论, 提出一种新的判别分析方法。使用逻辑回归估算决策粗糙集的条件概率, 同时通过决策粗糙集理论和贝叶斯决策程序进行阈值计算, 为判别分析提供了一种合理的阈值解释机理。
Jia et al. ^[19] 和贾修一等 ^[20-21]	提出决策风险最小化的属性约简方法, 将每个样本的条件概率为搜索空间, 以风险损失最小化为目标, 求出的损失函数和阈值能使决策风险最小化。
张贤勇等 ^[22]	引入条件概率中的绝对性度量建立三支关注, 与三支决策进行双量化集成, 得到集成区域类型与基本语义 (粒) 体系。
汪璐等 ^[23]	通过由决策粗糙集模型得出的决策阈值与分类器提供的条件概率来划分区域, 提出一种三支决策贝叶斯网络分类器, 将条件概率求解和阈值求解融合在一起。

由表 8 可知: 关于条件概率的相关研究, 有学者寻找估算条件概率的新方法, 也有将条件概率作为一重要研究参数求取最佳阈值或其他对象值。

(二) 损失函数方面研究

决策粗糙集模型的关键问题是确定损失函数的损失值, 而损失函数矩阵的设置, 总是和决策者相关联。损失函数可以确定决策粗糙集模型的阈值参数, 其重要性吸引了大量学者对其进行研究, 如表 9 所示。

从表 9 可以看到, 关于损失函数的研究较多, 大体有: (1) 研究损失函数特性优化模型; (2) 考虑损失函数为各类不确定性评估从而拓展决策粗糙集模型应用范围; (3) 引入各类理论求解损失函数得到最佳阈值; (4) 拓展损失函数得到新的三支决策模型等。

(三) 其他方面研究

除了三支决策中的条件概率和损失函数这两大关键要素, 也有许多学者们从其他角度, 对其进行模型改进和应用拓展, 具体如表 10 所示。

通过表 10 的文献整理可知, 国内外学者已从多种角度补充和拓展三支决策模型 (决策粗糙集模型):

(1) 尝试对三支决策语意做更合理的解释; (2) 研究属性约简、群体决策、最优阈值算法等; (3) 探索基于三支决策理论及思想在诸多领域的应用。

表 9 损失函数方面研究

作者	内容
Yu et al. ^[24]	基于决策粗糙集理论, 考虑多种损失函数, 提出一种聚类模式代价评估方法, 以及一种聚类有效性指标。该方法不仅有助于选择聚类算法的终止点, 而且有助于处理不同粒度的交叉重叠聚类。
Herbert and Yao ^[25-27]	将决策粗糙集中的损失函数与分类度量的博弈论相结合, 以准确度、一般性两个维度进行博弈, 通过合作或竞争确定博弈的平衡点, 从而使各决策域大小目标达到最优。
Yao and Deng ^[28]	通过使用具有相对值特征的损失值, 应用于模型中各阈值表达式, 从而达到减少阈值中变量个数的作用。
Jia et al. ^[19] 和贾修一等 ^[20, 21]	提出决策风险最小化的属性约简方法, 通过研究基本模型中的损失风险和阈值参数之间关系, 从给定的数据中研究在决策粗糙集模型中使用的损失函数和阈值, 建立优化模型并设计出一种自适应求阈值参数的算法。同时, 定义了决策风险最小化的属性简约。
Deng and Yao ^[29]	为寻找概率粗糙集中最优阈值, 引入信息论, 利用信息熵作为不确定性度量, 提出了一种以不确定性为目标函数且用于解释和确定阈值的信息理论方法。
Azam and Yao ^[30]	为确定概率粗糙集阈值的最佳值, 通过引入博弈论来研究概率阈值和它们对不同区域影响的不确定性水平之间的关系, 提出一种实现最佳阈值的配置机制。
Liang et al. ^[31] , Liu et al. ^[32-34] , 刘盾等 ^[35, 36]	把不确定性评估形式引入到损失函数中, 考虑决策粗糙集中各损失值依次为三角模糊数, 概率分布、区间数和模糊数等不确定性形式, 从而提出新的决策粗糙集模型, 拓宽了损失值的范围。
Liu等 ^[37]	通过研究在不同损失函数条件下所生成的概率粗糙集模型及其相互间关系, 提出了“四层次概率粗糙集模型”。该模型可生成十种概率粗糙集模型以及形成两组模型: 二支决策和三支决策。
Liang D et al. ^[38]	将对偶犹豫模糊集引入决策粗糙集理论中, 提出一种新的三支决策模型: 考虑基于决策粗糙集对偶犹豫模糊元素 (DHFSs) 的损失函数, 提出了对偶犹豫模糊决策粗糙集模型。分析了在对偶犹豫模糊环境下损失函数的规范化原则, 研究了期望损失的一些性质, 设计了利用新模型驱动三支决策的两种方法, 丰富了期望损失的比较。
Liu D et al. ^[17]	提出了一种基于不完备信息系统的三支决策模型。定义了一个新的关系来描述不完备信息的相似程度。针对不完备信息系统中存在的缺失值, 利用区间数获得损失函数。采用一种包含不完备信息和损失函数的混合信息表, 对新的三支决策模型进行处理。
Liang D et al. ^[39]	将群体决策引入决策粗糙集理论的三支决策, 提出了基于群体决策的三支决策。关注群体决策环境下的损失函数的测定分析, 借助于合理粒度原则, 采取重要的和多数的专家建议来测量每一次损失函数, 为确定损失函数提供一种新的解释。
Liang D and Liu D. ^[40]	将犹豫模糊集引入到决策粗糙集理论中, 提出了一种新的犹豫模糊决策粗糙集理论模型 (HFDTRSs)。在犹豫模糊信息下, 仔细研究了期望损失的性质和它们相应的分值, 为确定决策粗糙集损失方面提供了解决方案。
张燕平等 ^[41]	提出一种基于构造性覆盖算法的代价敏感三支决策模型, 通过引入代价敏感, 在基于构造性覆盖算法的三支决策模型中, 将损失函数的大小关系作为调整正域、负域和边界域的依据。尽量减少损失函数较大的划分错误, 来尽可能的减少划分损失。
张楠等 ^[42]	将效用理论引入三支决策模型, 通过将风险损失函数扩展为效用函数从而提出了基于效用的三支决策模型。研究了效用与对象的概率之间的单调关系, 给出了效用三支决策中正域效用、边界域效用与负域效用的计算方法。
Zhang Q et al. ^[43]	将三支决策与不确定分类相结合, 定义了概率粗糙集模型的两类分类错误和两类不确定分类, 考虑两类分类错误和两类不确定分类的代价参数, 重新得到概率粗糙集模型的一对阈值, 提出基于两类不确定分类的三支决策模型。

四、结论与展望

决策粗糙集是通过贝叶斯决策过程对Pawlak经典粗糙集理论的拓展, 而三支决策则是建立在实际处理问题的情景下, 对决策粗糙集的语义解释。不同于二支决策, 三支决策在信息获取不充分时采取非承诺措施, 这种措施或能将决策损失降到最低。三支决策分析是一门年轻的学科, 具有非常强的普适性和应用性, 其在科学领域的作用正得到研究者的逐步重视。本文对三支决策做了综述性回顾。探讨三支决策相关背景, 介绍三支决策基本模型并总结出近年来部分现有的研究成果, 这些分析为将来三支决策相关研究提供理论与应用参考。在未来, 三支决策有望在模型扩展、属性约简、阈值设置问题、规则获取问题等方面做进一步研究。具体地, 可以有如下几个方面:

1. 三支决策理论模型扩展工作。结合不确定性信息处理方法进一步扩展完善理论模型, 具体可以从模糊集、粒计算、灰色决策、形式概念分析等方

面入手。考虑损失函数的损失值和条件概率为不确定性评估, 扩展三支决策的应用范围。

2. 基于决策粗糙集理论模型的属性约简探索。属性约简是粗糙集的重要研究方向, 决策粗糙集也应重视属性约简研究。考虑风险成本的决策语境, 寻找合适的属性约简算法以及完善不确定信息下的三支决策属性约简理论, 是当前的研究重点。

3. 解决三支决策的阈值设置问题。寻找最优阈值设置的新算法, 可以考虑贝叶斯理论、机器学习、层次分析法、优化算法、博弈论、统计学等方法。

4. 三支决策规则获取研究。目前, 三支决策的规则获取仍然过程繁琐, 面临问题繁多, 比如决策信息存在多层结构, 寻找高效的规则获取方式十分必要。

5. 三支决策在大数据下的应用。基于大数据这一研究主流, 有必要考虑三支决策在大数据背景下的建模问题, 增加三支决策的普适性。考虑到大数据具有数据庞大、格式多样、结构复杂、实时更新等特点, 对在动态的数据环境中建立三支决策模型, 以及处理不确定性信息下的三支决策过程, 都

有待进一步研究。

6. 进一步拓展三支决策的应用领域。三支决策

的思维存在于生活的各领域，寻找出每个学科适用的三支决策模型，也是需要研究者们努力探索的。

表 10 其他方面研究

作者	内容
Li and Zhou ^[44]	针对实际应用中，某一单一模型不能解决不同个性的决策者表现出决策多样性的问题，基于各自决策偏差下的风险最小值，计算概率包含的阈值，提出了一种基于决策粗糙集的风险偏好决策模型。
Qian et al. ^[13]	结合决策粗糙集模型与多粒度粗糙集理论，提出一种多粒度决策粗糙集模型。
陈刚等 ^[45]	基于三支决策风险损失函数，为达到决策风险最小目标，以样本的条件概率为搜索空间，求得使风险损失最小化的最优阈值。从而提出一种不需要依赖于专家经验的基于网格搜索的最优阈值生成算法。
徐久成等 ^[46]	将损失函数引入支持向量机中，提出一种基于三支决策的支持向量机增量学习方法，通过特征距离与中心距离的比值来计算三支决策中的条件概率，从而解决三支决策中条件概率的计算问题。
徐久成等 ^[47]	将三支决策与Vague集相结合，分别用条件概率、阈值对以及风险损失函数对Vague集中的隶属函数进行定义及描述，提出基于Vague集的三支决策隶属函数。
刘盾，梁德翠 ^[48]	基于三支决策现有模型、算法及应用，提出了一种广义三支决策和狭义三支决策理论。广义三支决策注重对三支决策概念内涵和外延进行诠释；狭义三支决策主要注重三支决策在实际决策问题中的语义解释。
Liang D et al. ^[16]	引入语言评价到决策粗糙集中，考虑到在三支决策语言评价中用到的两种参数，构造了一种基于贝叶斯决策过程的新型三支决策模型。借助于多属性群决策，设计了一种支持多属性群决策一致性改进的自适应算法。
于洪，毛传凯 ^[49]	从类内紧凑性和考虑近邻类间分离性角度出发，定义了分离性指数、聚类结果评估有效性指数，并提出了一种基于k-means的自动三支决策聚类算法。为处理具有不确定信息的基于k-means算法框架的聚类数目自动确定的难题提供了一种新的解决思路。
薛占熬等 ^[50]	结合直觉模糊理论和三支决策，提出基于直觉模糊集的三支决策两描述模型、三描述模型和一般模型。
薛占熬等 ^[51]	提出一种基于覆盖关系的Sugeno测度粗糙集模型，定义上、下近似算子并证明其并、交、补等运算的代数性质，结合三支决策理论，给出了该模型的三支决策规则和方法。
王磊等 ^[52]	在多标记情感分类问题中，使用基于主题的情感识别模型判断句子的多标记情感类别，并引入三支决策方法，提出了一个基于主题特征与三支决策理论相融合的多标记情感分类方法。
周哲，商琳 ^[53]	在文本情感分析中，融入三支决策思想，针对分类确信程度不够高的目标文本，分类器将其置于三支决策的边界域中等待处理，从而提出一种新的文本特征抽取方式。
朱艳辉等 ^[54]	为解决新闻性文章情感词识别，将三支决策分别引入传统的三种机器学习算法NB、SVM和KNN，提出基于三支决策的新闻情感关键词识别方法。
Yao Y. ^[55, 56]	将三支决策理论概括为即一种“三分而治”（trisection-and-acting）的模型，它包括两个基本任务，一个是将一全集划分为三个不相交的区域，叫做全集的三分域。另一个任务是设计出最有效的策略作用于这一个或多个区域。
Li M and Wang G. ^[57, 58]	基于三支决策，提出了两个模型来构建不完备形式背景中的近似概念，并揭示了两者的等价性。为了简化近似概念格的表示，构造一种对象-概念辨识矩阵，提出了一种属性约简的方法。
Savchenko A V. ^[59]	研究了代价敏感序贯三支决策的应用和多类目标统计识别的粒计算问题。在识别过程中，对每个粒度级别进行顺序分析。建立了不同层次的目标距离的概率粗糙集。给出了在Essex数据库中的人脸识别实验结果和最先进的方向梯度直方图特征。
Zhang H Y et al. ^[60]	提出了一种利用包含测度比较两个区间集的框架。定义了包含测度，构建不同的包含测度来表示区间集的定量排序。提出相似度和区间集的距离，用包含测度研究他们的关系。
Peters J F, Ramanna S. ^[61]	介绍了近端三支决策，这种三支决策源于近端结构。近端三支决策从德洛内图的分析以及基于社交网络节点位置的情感网络提出，以信息粒度的形式从社交网络获取信息。
Hu B Q et al. ^[62]	为探索一个三支决策的统一理论，通过公理化方法建立三支决策空间中相应的三支决策，引入了一种新的三支决策类型并讨论其特性。
Lang G et al. ^[63]	讨论了利用决策粗糙集理论计算冲突分析的阈值 α 和 β 的机制。描述了在动态信息系统中构造概率冲突、中立和联盟集合的增量算法，根据最大联盟与联盟集之间的关系，提出了一种有效的方法来帮助政府根据当前国际形势的变化调整各种政策，以计算动态信息系统中的最大联盟。
Li X et al. ^[64]	介绍了基于子集评价的三支决策模型，利用公理化方法，用评价函数的形式描述特征拟阵，在此特征上定义三支拟阵。将三支拟阵推广到三支模糊拟阵，根据粗糙独立子集系统提出三支模糊拟阵的等价描述。给出了三支模糊拟阵的第二描述：三支模糊拟阵是一个等价类的最大元。
Hao C et al. ^[65]	利用序贯三支决策研究在动态多粒度决策表中最优规模选择问题。提出了多粒度决策表的最优规模选择方法。该方法不需要分别考虑一致性和不一致性的多粒度决策表，适用于更新加入多个新对象的多粒度决策表的最优规模。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough set[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2] YAO Y Y, WONG S K. A decision theoretic framework for approximating concepts[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1992, 37(6): 793-809.

[3] YAO Y Y. Three-way decision: An interpretation of

rules in rough set theory[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[4] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[5] 贾修一, 商琳, 周献中, 等. 三支决策理论与应用[M]. 南京: 南京大学出版社, 2012.

[6] 刘盾. 三支决策与粒计算[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

- [7] 于洪. 三支决策: 复杂问题求解方法与实践[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [8] 梁德翠. 模糊环境下基于决策粗糙集的决策方法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2014.
- [9] YAO Y, ZHAO Y. Attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. *Information Sciences*, 2008, 178(17): 3356-3373.
- [10] YAO Y. Probabilistic rough set approximations[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2008, 49(2): 255-271.
- [11] YAO Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models[J]. *Information Sciences*, 2011, 181(6): 1080-1096.
- [12] JIA X, LIAO W, TANG Z, et al. Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. *Information Sciences*, 2013, 219(1): 151-167.
- [13] QIAN Y, ZHANG H, SANG Y, et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 225-237.
- [14] LIU D, LI T, LIANG D. Incorporating logistic regression to decision-theoretic rough sets for classifications[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 197-210.
- [15] LIANG D, LIU D. Deriving three-way decisions from intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. *Information Sciences*, 2015, 300: 28-48.
- [16] LIANG D, PEDRYCZ W, LIU D, et al. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets under linguistic assessment with the aid of group decision making[J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 29: 256-269.
- [17] LIU D, LIANG D, WANG C. A novel three-way decision model based on incomplete information system[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 32-45.
- [18] YAO Y, ZHOU B. Naive Bayesian Rough Sets[C]// *International Conference on Rough Set and Knowledge Technology*. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 719-726.
- [19] JIA X, TANG Z, LIAO W, et al. On an optimization representation of decision-theoretic rough set model[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 156-166.
- [20] 贾修一, 商琳, 陈家骏. 决策风险最小化属性约简[J]. *计算机科学与探索*, 2011, 5(2): 155-160.
- [21] 贾修一, 李伟涛, 商琳, 等. 一种自适应求三枝决策中决策阈值的算法[J]. *电子学报*, 2011, 39(11): 2520-2525.
- [22] 张贤勇, 杨霖琳, 唐孝. 三支决策与三支关注的双量化集成[J]. *模式识别与人工智能*, 2017, 30(5): 394-402.
- [23] 汪璐, 贾修一, 顾雁因. 三支决策贝叶斯网络分类器[J]. *南京大学学报: 自然科学*, 2016, 52(5): 833-843.
- [24] YU H, CHU S, YANG D. Autonomous knowledge-oriented clustering using decision-theoretic rough set theory[C]. *International Conference on Rough Set and Knowledge Technology*. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 687-694.
- [25] HERBERT J P, YAO J T. Game-theoretic risk analysis in decision-theoretic rough sets[C]// *International Conference on Rough Set and Knowledge Technology*. Berlin: Springer-Verlag, 2008: 132-139.
- [26] HERBERT J P, YAO J T. Game-theoretic rough sets[J]. *Fundamenta Informaticae*, 2011, 108(3-4): 267-286.
- [27] HERBERT J P, YAO J T. Analysis of data-driven parameters in game-theoretic rough sets[C]// *International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology*. Berlin: Springer-Verlag, 2011: 447-456.
- [28] YAO Y, DENG X. Sequential three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(3): 341-353.
- [29] DENG X, YAO Y. An information-theoretic interpretation of thresholds in probabilistic rough sets[C]// *International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology*. Berlin: Springer-Verlag, 2012: 369-378.
- [30] AZAM N, YAO J. Analyzing uncertainties of probabilistic rough set regions with game-theoretic rough sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 142-155.
- [31] LIANG D, LIU D, PEDRYCZ W, et al. Triangular fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2013, 54(8): 1087-1106.
- [32] LIU D, LI T R, LI H X. A multiple-category classification approach with decision-theoretic rough sets[J]. *Fundamenta Informaticae*, 2012, 115(2-3): 173-188.
- [33] LIU D, LI T R, LIANG D C. Three-way government decision analysis with decision-theoretic rough sets[J]. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2012, 20(1): 119-132.
- [34] LIU D, LI T R, LIANG D C. Decision-theoretic rough sets with probabilistic distribution[C]// *International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology*. Berlin: Springer-Verlag, 2012: 389-398.
- [35] 刘盾, 李天瑞, 李华雄. 区间决策粗糙集[J]. *计算机科学*, 2012, 39(7): 178-214.
- [36] 刘盾, 李天瑞, 梁德翠. 模糊数决策粗糙集[J]. *计算机科学*, 2012, 39(12): 25-29.
- [37] LIU D, LI T R, RUAN D. Probabilistic model criteria with decision-theoretic rough sets[J]. *Information Sciences*, 2011, 181(17): 3709-3722.
- [38] LIANG D, XU Z, LIU D. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets with dual hesitant fuzzy information[J]. *Information Sciences*, 2017, 396: 127-143.
- [39] LIANG D, LIU D, KOBINA A. Three-way group decisions with decision-theoretic rough sets[J]. *Information Sciences*, 2016, 345: 46-64.

- [40] LIANG D, LIU D. A novel risk decision making based on decision-theoretic rough sets under hesitant fuzzy information[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(2): 237-247.
- [41] 张燕平, 邹慧锦, 赵姝. 基于CCA的代价敏感三支决策模型[J]. 南京大学学报: 自然科学, 2015, 51(2): 447-452.
- [42] 张楠, 姜丽丽, 岳晓冬, 等. 效用三支决策模型[J]. 智能系统学报, 2016, 11(4): 459-468.
- [43] ZHANG Q, XIA D, WANG G. Three-way decision model with two types of classification errors[J]. Information Sciences, 2017, 420: 431-453.
- [44] LI HUAXIONG, ZHOU XIANZHONG. Risk decision making based on decision-theoretic rough set: A three-way view decision model[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4(1): 1-11.
- [45] 陈刚, 刘秉权, 吴岩. 求三支决策最优阈值的新算法[J]. 计算机应用, 2012, 32(8): 2212-2215.
- [46] 徐久成, 刘洋洋, 杜丽娜, 等. 基于三支决策的支持向量机增量学习方法[J]. 计算机科学, 2015, 42(6): 82-87.
- [47] 徐久成, 杜丽娜, 刘洋洋. 三支决策与Vague集[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(7): 1464-1468.
- [48] 刘盾, 梁德翠. 广义三支决策与狭义三支决策[J]. 计算机科学与探索, 2017, 11(3): 502-510.
- [49] 于洪, 毛传凯. 基于k-means的自动三支决策聚类方法[J]. 计算机应用, 2016, 36(8): 2061-2065.
- [50] 薛占熬, 朱泰隆, 薛天宇, 等. 基于直觉模糊集的三支决策模型[J]. 计算机科学, 2016, 43(6): 283-288.
- [51] 薛占熬, 刘杰, 朱泰隆, 等. 基于覆盖的Sugeno测度粗糙集模型及其三支决策[J]. 计算机科学, 2016, 43(3): 285-290.
- [52] 王磊, 黄河笑, 吴兵, 等. 基于主题与三支决策的文本情感分析[J]. 计算机科学, 2015, 42(6): 93-96.
- [53] 周哲, 商琳. 一种基于动态词典和三支决策的情感分析方法[J]. 山东大学学报: 工学版, 2015, 45(1): 19-23.
- [54] 朱艳辉, 田海龙, 刘璟, 等. 基于三支决策的新闻情感关键词识别方法[J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2015, 38(4): 595-600.
- [55] YAO Y. Rough sets and three-way decisions[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. 2015: 62-73.
- [56] YAO Y. Three-way decisions and cognitive computing[J]. Cognitive Computation, 2016, 8(4): 543-554.
- [57] LI M, WANG G. Approximate concept construction with three-way decisions and attribute reduction in incomplete contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 165-178.
- [58] 李美争, 王国胤. 三支近似概念格中基于对象-概念辨识矩阵的属性约简方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1779-1784.
- [59] SAVCHENKO A V. Fast multi-class recognition of piecewise regular objects based on sequential three-way decisions and granular computing[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 252-262.
- [60] ZHANG H Y, YANG S Y, MA J M. Ranking interval sets based on inclusion measures and applications to three-way decisions[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 62-70.
- [61] PETERS J F, RAMANNA S. Proximal three-way decisions: Theory and applications in social networks[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 4-15.
- [62] HU B Q, WONG H, YIU K F C. On two novel types of three-way decisions in three-way decision spaces[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 82: 285-306.
- [63] LANG G, MIAO D, CAI M. Three-way decision approaches to conflict analysis using decision-theoretic rough set theory[J]. Information Sciences, 2017, 406: 185-207.
- [64] LI X, SUN B, SHE Y, et al. Generalized matroids based on three-way decision models[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 90: 192-207.
- [65] HAO C, LI J, FAN M, et al. Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions[J]. Information Sciences, 2017, 415: 213-232.

编辑 张莉